

國立臺灣大學 103 學年度高中物理科學人才培育計畫  
數學科試題 (103 插班生)

一· 填充題：

1. 方程式  $\log_2(9^x - 5) = \log_2(3^x - 2) + 2$  之解為  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(8 分)

2. 已知  $(1 + 2x + ax^2)^4$  展式中  $x^5$  項係數為 312，則整數  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(8 分)

3. 設  $\frac{1}{a}$ 、 $\frac{1}{b}$ 、 $\frac{1}{c}$ 、 $\frac{1}{d}$  成等差，則  $\frac{a+b}{a-b} - \frac{c+d}{c-d} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(8 分)

4.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(1) 所有  $A \rightarrow B$  之函數共有  $\underline{\hspace{2cm}}$  個。

(2) 承上，函數  $f$  滿足「若  $i < j$ ，則  $f(i) < f(j)$ 」有  $\underline{\hspace{2cm}}$  個。

(12 分)

5. 設  $x, y \in R$ ，且  $-2 \leq x \leq 3$ ， $-3 \leq y \leq 4$ ，

求  $xy - x + 2y + 3$  之最大值  $\underline{\hspace{2cm}}$  最小值  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(8 分)

6. 向量  $\vec{A} = 3\hat{i} - \sqrt{2}\hat{j} - \hat{k}$ ， $\vec{B} = c\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} - 3\hat{k}$ ，其中  $c$  為一常數，

$\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  分別為  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -軸正方向的單位向量。

(1) 求向量  $\vec{A}$  之長度 (大小) =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 設若向量  $\vec{B}$  垂直於向量  $\vec{A}$ ，則  $c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(12 分)

7. 設若  $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$ ，則介於 0 及  $2\pi$  弧度之  $\theta$  值 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(8 分)

8. 有 A, B, C 三個箱子, A 箱中有 3 紅 2 白, B 箱中有 3 紅 4 白, C 箱是空箱, 自 A, B 兩箱各任取一球放入 C 箱, 則
- (1) C 箱含有紅球的機率為\_\_\_\_\_。(6 分)
  - (2) 自 C 箱任取一球, 則取到紅球的機率為\_\_\_\_\_。(6 分)
  - (3) 自 C 箱任取一球, 已知取到紅球, 則此紅球為 A 箱球的機率為\_\_\_\_\_。(4 分)

二. 計算題:(20 分, 須給計算細節)

圖中,  $P$  為正方形  $ABCD$  內一點,  $\overline{PD} = 1$ ,  $\overline{PA} = \sqrt{2}$ ,  $\overline{PB} = \sqrt{3}$ ,

求陰影圖形的面積。

