

國立臺灣大學 105 學年度高中物理科學人才培育計畫
數學科試題 (105 插班生)

一、選擇填充題：(每題8分)

1. 已知 ω 為 $x^3 = 1$ 之一虛根，則 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\omega\right)^3 = a + b\omega$ ，($a, b \in \mathbb{R}$)，下列何者正確？
(A) $a = \frac{5}{13}$ ，(B) $b = \frac{12}{13}$ ，(C) $a = \frac{12}{13}$ ，(D) $b = \frac{5}{13}$ ，(E) 以上皆非。
2. 已知 $f(x) = -x^3 - 6x^2 + 15x - 7$ ，下列何者正確？
(A) $x > 1$ 時， $f(x)$ 是遞增函數
(B) $-5 < x < 1$ 時， $f(x)$ 是遞增函數
(C) $x = 1$ 時， $f(x)$ 有極大值 1
(D) $x = -5$ 時， $f(x)$ 有極小值 -5
(E) 方程式 $f(x) = 0$ 有 3 個實數根
3. 下列哪些函數圖形與直線 $y = x$ 只有 1 個交點？
(A) $y = 2^x$ ，(B) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，(C) $y = \log_2 x$ ，(D) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ，(E) $y = |\log_2 x|$ 。
4. 投擲一個均勻硬幣，若連續出現二次反面則停止，若擲到第 15 次恰好停止，則共有幾種擲法？
(A) 375，(B) 376，(C) 377，(D) 378。
5. 已知 $a, b \in \mathbb{Q}$ ，且 $\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}$ 均為無理數，求 $(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b})^{100}$ 展開整理後，其中為有理數項共有幾項？
(A) 1，(B) 2，(C) 15，(D) 16，(E) 17，
(F) 若自己認為還有其他答案，請自行填寫
6. 已知 $\sum_{n=1}^5 n|x+n|$ ，則當 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 時，有最小值：
(A) -1，(B) -2，(C) -3，(D) -4，(E) -5。

7. $k \in \mathbf{R}$ ，已知 $||x| - 3| = k$ ，則下列何者錯誤？

- (A) $k < 0$ 時，無解
- (B) $k = 0$ 時，有四個相異實數解
- (C) $0 < k < 3$ 時，有四個相異實數解
- (D) $k = 3$ ，有三個相異實數解
- (E) $k > 3$ ，有三個相異實數解

8. 已知 $\log_3 a = 7$ ， $\log_3 b = 10$ ，則下列哪些正確？

- (A) $\log_3(a + b) = (\log_3 a)(\log_3 b)$
- (B) $\log_3(a + b) = \log_3 a + \log_3 b$
- (C) $a + b$ 為 28 的倍數
- (D) $a + b$ 為 6 位數
- (E) $\log_3(a + b)$ 介於 10 到 11 之間

9. 設 $A(1, -1)$ ， $B(-1, 3)$ 為 xy 平面上的兩點，若 $P(x, y)$ 為直線 AB 上任一點，則 $9^x + 3^y + 1$ 之最小值為 _____。

10. 拋物線 $y = -\frac{x^2}{2}$ 與過點 $M(0, -1)$ 的直線 L 相交於 A, B 兩點。已知 O 為原點，若直線 OA 與直線 OB 的斜率之和為 1，則直線 L 的方程式為 _____。

二、證明申論題：(一題20分)

11. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n = na + n(n-1)b$ ，其中 $n = 1, 2, \dots$ ， a, b 是常數且 $b \neq 0$ 。

(A) 證明： $\langle a_n \rangle$ 是等差數列；

(B) 證明：以 $\left(a_n, \frac{S_n}{n} - 1\right)$ 為坐標的點 $P_n (n = 1, 2, \dots)$ 都落在同一條直線上，並寫出此直線方程式。