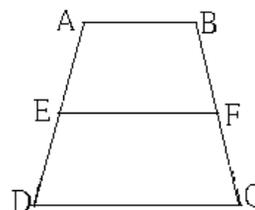


國立臺灣大學 105 學年度高中物理科學人才培育計畫  
數學科試題 (105 新生)

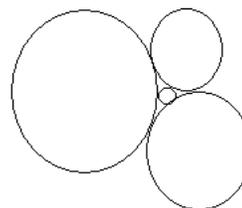
一、填充題：（每題10分）

1. 如右圖，梯形  $ABCD$  中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，且  $\overline{CD} = 3\overline{AB}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{EF}$  將梯形  $ABCD$  分成面積相等的兩部分，則  $\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 滿足方程式  $x^2 + 13x + 39 = 2\sqrt{x^2 + 13x + 47}$  的所有實數  $x$  的乘積 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 半徑分別為 1、2 及 3 的三個圓互相外切 (如右圖所示)，有一個小圓落在它們之間，且與它們都相切，求此小圓的半徑 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



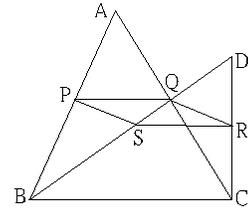
4. 有 5 克、7 克之砝碼各有無限多個，試問無法秤出的最大重量是  $\underline{\hspace{2cm}}$  克。  
(砝碼只可放置於天秤的其中一邊，另一邊置物)

5. 從正整數  $1, 2, 3, 4, \dots, n$  中，刪除某一項  $x$ ，已知剩下的  $n - 1$  個數的算術平均數為  $\frac{261}{10}$ ，試求  $x$  之值 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 一個正整數如果從左讀到右與從右讀到左相同，則稱這個數為迴文數。例如：  
1, 88, 747及2002。若將五位數中的所有迴文數由小到大排成一數列：  
10001、10101、……，則 78987是這個數列中的第 \_\_\_\_\_ 項。

7. 已知  $a = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$ ,  $b = \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1$ ,  $c = -\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$  則  
 $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$  的值為 \_\_\_\_\_。

8. 如右圖， $P, Q, R, S$  分別為  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{CD}, \overline{BD}$  之中點， $\triangle ABC$  面積為 20，  
 $\triangle BCD$  面積為 16，則平行四邊形  $PQRS$  面積為 \_\_\_\_\_。



## 二、計算題：（一題20分）

9. 已知  $f(x)$  滿足  $f(x)f(1-x) = 1$ ，其中  $0 \leq x \leq 1$ ，求  
 $\frac{1}{1 + [f(\frac{0}{99})]^2} + \frac{1}{1 + [f(\frac{1}{99})]^2} + \frac{1}{1 + [f(\frac{2}{99})]^2} + \dots + \frac{1}{1 + [f(\frac{98}{99})]^2} + \frac{1}{1 + [f(\frac{99}{99})]^2}$  之值。