國立臺灣大學106學年度高中物理科學人才培育計畫
數學科試題 (106插班生)

一、選擇填充題：（每題8分）

1. 二次函數 $y = x^2+px+q$，其中 p, q 為實數。此函數圖形過點 $(2, -1)$ 且與 x 軸交於相異二點 A, B，設此函數圖形的頂點為 M，求 ΔAMB 面積的最小值 ________。

2. 整係數多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$，且 $f(\sqrt{41} - 5) = f(1 + i) = 0$，則滿足 $f(x) < 0$ 的整數解有 ________ 個。

3. 已知實數 a, b 滿足 $\sqrt{a^2 - 2a + 1} + \sqrt{36 - 12a + a^2} = 10 - |b - 2| - |b + 3|$，則 $a^2 + b^2$ 之最大值是 ________。

4. 設 m, n 為正整數，則滿足 $\log_{10} m + 2\log_{10} n = 5$ 之序組 (m, n) 有 ______ 組。

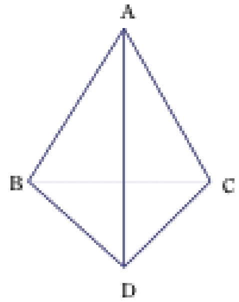
5. 已知 a 是方程式 $x^2 - x - 2000 = 0$ 的一個正根， 則代數式 $3 + \dfrac{2000}{1 + \frac{2000}{1+\frac{2000}{a}}}$ 的值為 ________。

6. 設 t 為實數，拋物線 $y = 2x^2+tx+3$ 的圖形頂點為 P_t，則所有 P_t 點所成的圖形方程式為 _________。

7. 設 $x > 0$，若 $\log_x 2, \log_{2x} 2, \log_{4x} 2$ 三數分別為一等差數列的第1、2、4項，則 $\log_x 2 =$ ________。

8. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n} + \dfrac{1}{4}$，則此數列的第 9 及第 999 項 $a_9, a_{999} =$ ______、______。

9. 一動點P由正四面體$ABCD$之頂點A出發，沿著四面體的稜移動，由一頂點經過1秒後移到任意另一頂點之機率均為$\frac{1}{3}$，則3秒與6秒後，P點落在A點之機率各為______、_____。



10. 已知$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t$，設若$y(t)=(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^3$與$x(t)=(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})^2$，則以$t$表示的話，$y$對$x$微分之導函數$\frac{dy}{dx}=$_______。

二、計算申論題：(一題20分)

11. . 設$A(1,3),B(4,1),C(5,2),D(2,5)$，而$P(x,y)$為平面上一點，

(a) 求$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$之最小值與此時$P$之坐標；

(b) 求$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$之最小值與此時$P$之坐標。