國立臺灣大學107學年度高中物理科學人才培育計畫
數學科試題 (107插班生)

一、填充題：（每題7分）

1. 在複數平面上，非為零的兩個複數 z_1 及 z_2，都在以對應於 i 的點爲圓心半徑為 1 的圓上，設若 $\overline{z}_1 \cdot z_2$的實數部份為零，且 $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{6}$，則 $z_2 =$ ________。

2. 已知正實數 a, b 滿足$a+b=1$，則 $M = \sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+2b}$ 的整數部份為 ________。

3. 設 $x = 0.82^{0.5}$，$y = \sin 1$，$z = \log_3 \sqrt{7}$，則 x, y, z 的大小關係為 ________。

4. 給定數列 $\{x_n\}$，$x_1 = 1$，且 $x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}\,x_n + 1}{\sqrt{3} - x_n}$，則 $x_{1999} - x_{601} =$ ________。

5. 已知 $\alpha = \dfrac{\pi}{24}$，則 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos 4\alpha \cos 3\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 的值等於 ________。

6. 已知 $a+b+c = abc$，$A = \dfrac{(1-a^2)(1-b^2)}{ab} + \dfrac{(1-b^2)(1-c^2)}{bc} + \dfrac{(1-c^2)(1-a^2)}{ca}$，則 A 的值為 ________。

7. 在三角形 ΔABC 中，$\angle A = \dfrac{\pi}{3}$，$\sin B = \dfrac{5}{13}$，則 $\cos C =$ ________。

8. 若 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，則方程式 $\dfrac{1}{2}\left[x^2 + x\right] = 19x+99$ 的實數解為 ________。

9. 若 ΔABC 是鈍角三角形，則 $\cos^{-1}(\sin A)+\cos^{-1}(\sin B)+\cos^{-1}(\sin C)$ 的取值範圍是 ________。

10. 有一個數列 $a_1, a_2, \cdots, a_{98}$ 滿足 $a_{n+1}=a_n+1, \forall n \in \{1,2,\ldots,97\}$，已知數列的總和為 137，則 $a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{98}$ 之值為 ________。

二、計算申論題：(共30分)

11. 設若 $x \to 0$，試求 $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ 之極限值。[10分]

12. 求通過橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 曲線上點 $P(-4,\dfrac{12}{5})$ 的切線及法線方程式。[20分]