國立臺灣大學107學年度高中物理科學人才培育計畫
數學科試題 (107新生)

一、填充題：（每題 7 分）

1. 用2013減去它的 $\frac{1}{2}$ 後，再減去剩下的 $\frac{1}{3}$，然後再減去剩下的 $\frac{1}{4}$，$\cdots$，依此類推，直到最後減去剩下的 $\frac{1}{2013}$，所得結果為何？________

2. 已知 $a^2-3a+1=0$，求 $3a^3-8a^2+a+\dfrac{3}{a^2+1}$ 之值 $=$________ 。

3. 在三邊長為連續自然數，但周長不超過 100 的三角形中，銳角三角形的個數為 ________ 。

4. 若 x, y, z 為 ΔABC 之三邊長，且 $x^2+y^2+z^2-6x-8y-10z+50=0$，則 ΔABC 的面積為 ________ 平方單位。

5. 若 $f(x)=\dfrac{2000}{1+x}$，則 $f(1)+f(4)+f(7)+f(10)+f(13)+f(16)+f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{7})+f(\frac{1}{10})+f(\frac{1}{13})+f(\frac{1}{16})$ 之值 $=$________ 。

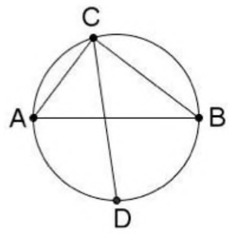
6. 投擲一個公正的骰子兩次，記第一次擲出的點數為 a，第二次擲出的點數為 b。則 x, y 的方程組 $\begin{cases} ax+by=3 \\ x+2y=2 \end{cases}$ 解出 x, y 均為正數的機率為 $=$________ 。

7. 若 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$，則分式 $\dfrac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}=$ ________ 。

8. 已知 $M=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6$ 的小數部份為 P，則 $M(1-P)=$ ________ 。

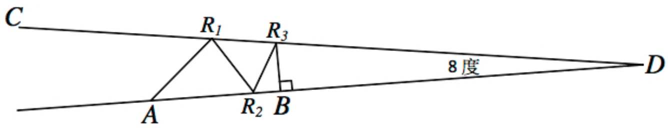
9. 在直角坐標系上，$y=\left||x^2-2|-1\right|$ 與 $y=1$ 的圖形交點有 ________ 個。

10. 如右圖所示，有一直徑為 10 的圓，其中 $\overline{AB}$ 為直徑，圓上有另一點 C 滿足 $\overline{AC}=6$。若 D 也在圓上且 $\overline{CD}$ 為 $\angle ACB$ 的分角線，求 $\overline{CD}$ 長 = ________ 公分。



二、計算申論題：（一題15分）

11. 從點A出發的一條光線在一平面內行進，在直線 $\overline{AD}$ 和直線 $\overline{CD}$ 之間反射了 n 次後，垂直的射到 B 點(該點可能在直線 $\overline{AD}$ 上，也可能在直線 $\overline{CD}$ 上)，然後按原路返回點 A(如圖所示，在每一個反射點，入射光線和反射光線與直線 $\overline{AD}$ 或直線 $\overline{CD}$ 所成的角相等。附圖是 $n=3$ 時的光線路徑圖)。若 $\angle CDA=8^\circ$，則 n 的最大值是多少?



12. 如下圖，ΔABC 中，M 為 $\overline{BC}$ 中點，D、E兩點分別在 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$上，且 $\overline{AE}\parallel\overline{DM}$，$\overline{AM}$ 與 $\overline{DE}$ 相交於 F 點。請找出三角形 ΔCDE 與 ΔABC 面積的關係，並適當證明或申論之。