國立臺灣大學108學年度高中物理科學人才培育計畫
數學科試題 (108插班生)

一、選擇填充題：（每題8分）

1. 設 $f(x) = x^{100} + x^{50} + 1$，求 $f(-\frac{1+i}{\sqrt{2}})$ 之值 = ________ 。

2. 設 n 為正整數，且正整數 a, b 滿足 $a_n + b_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n$，則點 (a_n, b_n) 可證明都在同一雙曲線上，此雙曲線的方程式為 ________ 。

3. 設 $q > 0$，且 a 是方程式 $x^2 - 2x - q = 0$ 的一正根，則 $a - \cfrac{1000}{2 + \cfrac{1000}{2 + \cfrac{1000}{a}}} =$ ________ 。

4. 已知實數 x, y, z 滿足 $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 3$，求 $x + 2y + 3z$ 的最大值 = ________ 。

5. 設 L_1, L_2, L_3 為平面上三平行線，其中 L_2 介於 L_1 與 L_3 之間，而 L_1 與 L_2 距離為 a，L_2 與 L_3 距離為 b。今有一正三角形，其點分別在此三直線上。試求此三角形之面積 = ________ 。

6. 設等比級數 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}$ 的和是個 n 位數的數，且此和最高位數的數字為 a，求 n 與 a = ________ 。

7. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 3$，且當 $n \geq 1$ 時 $a_{n+1} = a_n + a_1 + 2n$，試求無窮級數 $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \cdots$ 之和 = ________ 。

8. 設 a, b, t 為實數，拋物線 ax^2+tx+b 的圖形頂點為 P_t，則所有 P_t 點所成的圖形方程式為 ________ 。

9. 化簡並求 $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta} + \dfrac{1}{1+\cos^2\theta} + \dfrac{1}{1+\sec^2\theta} + \dfrac{1}{\csc^2\theta}$ 之值為 ________ 。

10. 設 $x>0$，試求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x+h}}-\sqrt{1+\sqrt{x}}}{h}$ 的極限值 = ＿＿＿＿＿＿ 。

二、證明申論題：（一題20分）

11. 試問下列哪一個函數的部分圖形來描述右圖較恰當？選擇並詳細說明之。

(A) $(x-2)^2-2$
(B) $2\sin x+2$
(C) $2\cos x$
(D) $-\frac{1}{2}(x-2)^2+4$
(E) $3-2^x$