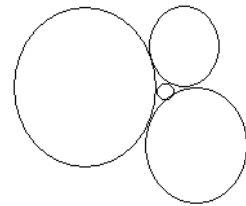


國立臺灣大學 110 學年度高中物理科學人才培育計畫  
數學科試題 (110 新生)

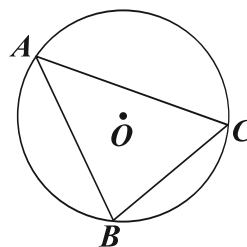
一、填充題：（每題8分）

1. 若  $P$  為拋物線  $y = x^2 - 6x + 14$  上的動點， $A, B$  兩點的坐標為  $(-3, 0), (1, 0)$ ，則  $\triangle ABP$  面積之最小值 = \_\_\_\_\_。
2. 四個數  $a, b, c, d$  滿足  $a + b = c, b + c = d, c + d = a$  的關係，若  $b$  是一個自然數，試求  $a + b + c + d$  的最大值 = \_\_\_\_\_。
3. 設  $n$  為自然數， $a = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$ ， $b = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$ ，  
若  $5a^2 + 22ab + 5b^2 = 2012$ ，則  $n =$  \_\_\_\_\_。
4. 求  $\sqrt{9988 \times 9989 \times 9990 \times 9991 + 1} - 9989^2$  之值 = \_\_\_\_\_。
5. 半徑分別為 1、2 及 3 的三個圓互相外切（如右圖所示），有一個小圓落在它們之間，且與它們都相切，求此小圓的半徑 = \_\_\_\_\_。



6. 已知  $a(a^2 - 1)(a + 2) + 1$  可以寫成  $a$  的一個二次多項式的完全平方，求此二次多項式為 \_\_\_\_\_。

7. 若  $\alpha$  是  $x^2 - 3x + 1 = 0$  的一根，則  $\frac{2\alpha^5 - 5\alpha^4 + 2\alpha^3 - 8\alpha^2}{\alpha^2 + 1}$  的值為 \_\_\_\_\_。
8. 甲箱內有 4 顆球，顏色分別為紅、黃、綠、藍；乙箱內有 3 顆球，顏色分別為紅、黃、黑。小賴打算同時從甲、乙兩個箱子中各抽出一顆球，若同一箱中每球被抽出的機會相等，則小賴抽出兩顆球顏色相同的機率為 \_\_\_\_\_。
9. 已知  $a_1 + a_2 + \cdots + a_{30} + a_{31}$  與  $b_1 + b_2 + \cdots + b_{30} + b_{31}$  均為等差級數，且皆有 31 項。若  $a_2 + b_{30} = 29$ ， $a_{30} + b_2 = -9$ ，則此兩等差級數的和相加的結果為 \_\_\_\_\_。
10. 如右圖，有一圓  $O$  通過  $\triangle ABC$  的三個頂點。若  $\angle B = 75^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，且圓弧  $\widehat{BC}$  的長度為  $4\pi$ ，則線段  $\overline{BC}$  的長度為 \_\_\_\_\_。



## 二、計算申論題：（一題 20 分）

11. 已知  $\frac{x_1}{x_1 + 1} = \frac{x_2}{x_2 + 3} = \frac{x_3}{x_3 + 5} = \cdots = \frac{x_{10}}{x_{10} + 19}$  且  $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 2005$ 。若  $x_1 = \frac{n}{m}$ ，且  $m, n$  為互質的正整數，試求  $m + n$  之值。