國立臺灣大學 111 學年度高中物理科學人才培育計畫
數學科試題 (111 插班生)

一、填充題：（每題 8 分）

1. 在複數平面上，非為零的兩個複數 z_1 及 z_2，都在以對應於 i 的點爲圓心半徑為 1 的圓上，設若 $\overline{z}_1 \cdot z_2$的實數部份為零，且 $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{6}$，則 $z_2 =$ ________ 。

2. 已知 $(1+2x+ax^2)^4$ 展式中 x^5 項係數為 312，則整數 a 為 ________ 。

3. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n + a_{n+1} = 2n^2$，求此數列的前 20 項和為 ________ 。

4. 已知 $\alpha = \dfrac{\pi}{24}$，則 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos 4\alpha \cos 3\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 的值等於 ________ 。

5. 已知 $a+b+c = abc$，$A = \dfrac{(1-a^2)(1-b^2)}{ab} + \dfrac{(1-b^2)(1-c^2)}{bc} + \dfrac{(1-c^2)(1-a^2)}{ca}$，則 A 的值為 ________ 。

6. 在座標平面上，O 為原點，四邊形 $ABCO$ 為正方形，而其中一邊 $\overline{AB}$ 在 直線 L : $mx+y=8$ 上，且已知 $\overline{AB}$ 被 x 軸平分，$m>0$，試求 $m =$ ________ 。

7. 已知方程式 $x^2-x-1=0$ 的二根也是方程式 $x^6-px^2+q=0$ 的根，則 $p, q =$ ________ 。

8. 設直線 $x=k$ 與 $y=\log_5 x$ 及 $y=\log_5(x+4)$ 分別交於 A, B 兩點，若 $\overline{AB} = \dfrac{1}{2}$，則 $k =$ ________ 。

9. 設若向量 $\vec{v}=2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$、$\vec{w}=5\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$，試求

(a) 向量 $\vec{v}$ 與 $\vec{w}$ 的夾角；

(b) 同時垂直於向量 $\vec{v}$ 與 $\vec{w}$ 之單位向量。

10. 試求 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}}{h}$ 的極限值 $=$ __________。

二、計算申論題：(一題 20 分)

11. 在三角形 ΔABC 中，$\angle B=\dfrac{\pi}{2}$（即 90°），且 $\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，若對所有實數 x，恆有 $ax^2+bx+c\geq 0$，試求 $\angle A$ 之最大值及最小值。