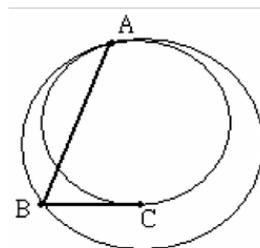


國立臺灣大學 111 學年度高中物理科學人才培育計畫  
數學科試題 (111 新生)

一、填充題：（每題8分）

1. 設  $a, b$  是實數且  $a + b = 1$ ,  $a^2 + b^2 = 3$ , 試求  $a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 =$  \_\_\_\_\_。
2. 滿足方程式  $x^4 + (x - 4)^4 = 626$  的所有實數  $x$  的乘積 = \_\_\_\_\_。
3. 右圖中大小二圓內切於  $A$  點, 其半徑的比為  $3:2$ ,  $\overline{BC}$  為小圓之切線,  $C$  為切點, 若  $\overline{AB} = 15$ , 求  $\overline{BC}$  長 = \_\_\_\_\_。



4. 梯形的兩腰長分別為 3 與 4, 兩底長分別為 5 與 10, 則此梯形的兩底中點的連線段長為 \_\_\_\_\_。
5. 從正整數  $1, 2, 3, 4, \dots, n$  中, 刪除某一項  $x$ , 已知剩下的  $n - 1$  個數的算術平均數為  $\frac{261}{10}$ , 試求  $x$  之值 = \_\_\_\_\_。
6. 若  $\frac{xy}{x+y} = 1$ ,  $\frac{yz}{y+z} = 2$ ,  $\frac{zx}{z+x} = 3$ , 則  $x =$  \_\_\_\_\_。
7. 夏令營組織 1987 各學員去遊  $A, B, C$  三處園區, 規定每人必須去一處, 最多去兩處遊覽, 那麼至少有幾人遊覽的地方完全相同? \_\_\_\_\_。

8. 已知  $7^{24} - 1$  可被 11 至 49 之間的三個整數整除，其中任兩個整數為 \_\_\_\_\_。

9. 已知  $a = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$ ， $b = \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1$ ， $c = -\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$  則  $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$  的值為 \_\_\_\_\_。

10. 化簡，並求出其值：

$$12^3 - 11^3 + 10^3 - 9^3 + 8^3 - 7^3 + 6^3 - 5^3 + 4^3 - 3^3 + 2^3 - 1^3 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

### 二計算申論題：（一題20分）

11. 如右圖，在坐標平面上，此拋物線為二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形，其對稱軸為  $x = -1$ 。試判斷下列 3 個代數式的正負，並說明理由。

(a)  $abc$

(b)  $3a - b$

(c)  $a - 2b + 4c$

