

國立臺灣大學 112 學年度高中物理科學人才培育計畫
數學科試題 (112 插班生)

一、填充題：（每題7分）

1. 在複數平面上，非為零的兩個複數 z_1 及 z_2 ，都在以對應於 i 的點為圓心半徑為 1 的圓上，設若 $\bar{z}_1 \cdot z_2$ 的實數部份為零，且 $\arg z_1 = \frac{\pi}{6}$ ，則 $z_2 =$ _____。
2. 已知正實數 a, b 滿足 $a+b=1$ ，則 $M = \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+2b}$ 的整數部份為 _____。
3. 設 $x = 0.82^{0.5}$ ， $y = \sin 1$ ， $z = \log_3 \sqrt{7}$ ，則 x, y, z 的大小關係為 _____。
4. 給定數列 $\{x_n\}$ ， $x_1 = 1$ ，且 $x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n + 1}{\sqrt{3} - x_n}$ ，則 $x_{1999} - x_{601} =$ _____。
5. 已知 $\alpha = \frac{\pi}{24}$ ，則 $\frac{\sin \alpha}{\cos 4\alpha \cos 3\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 的值等於 _____。
6. 已知 $a+b+c=abc$ ， $A = \frac{(1-a^2)(1-b^2)}{ab} + \frac{(1-b^2)(1-c^2)}{bc} + \frac{(1-c^2)(1-a^2)}{ca}$ ，則 A 的值為 _____。
7. 在三角形 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ， $\sin B = \frac{5}{13}$ ，則 $\cos C =$ _____。
8. 若 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，則方程式 $\frac{1}{2}[x^2 + x] = 19x + 99$ 的實數解為 _____。

9. 若 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形，則 $\cos^{-1}(\sin A) + \cos^{-1}(\sin B) + \cos^{-1}(\sin C)$ 的取值範圍是 _____。
10. 有一個數列 $a_1, a_2, \dots, a_{98}$ 滿足 $a_{n+1} = a_n + 1, \forall n \in \{1, 2, \dots, 97\}$ ，已知數列的總和為 137，則 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{98}$ 之值為 _____。

二、計算申論題：（共30分）

11. 設若 $x \rightarrow 0$ ，試求 $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ 之極限值。[10分]
12. 求通過橢圓 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 曲線上點 $P(-4, \frac{12}{5})$ 的切線及法線方程式。[20分]